23 費氏數列

在這節裡，我們要探討一則很重要的數列…費氏數列。它不僅在數學上重要，即使是在動植物界、藝術、建築、財經等方面，也扮演著很關鍵的角色。

23.1 二階遞迴數列的通解

定理 23.1 若數列$\langle f_n \rangle$滿足

$$f_{n+2} = af_{n+1} + bf_n,$$

其中a,b為實數且令α_0,β_0為二次方程式$x^2 = ax+b$的兩個相異根。證明：可以找到α及β使得

$$f_n = \alpha\alpha_0^n + \beta\beta_0^n.$$

【證明】因為$\alpha_0 \neq \beta_0$，所以聯立方程組（把α,β當成變數，把α_0,β_0當成係數）

$$\begin{cases} \alpha+\beta = f_0 \\ \alpha_0\alpha+\beta_0\beta = f_1 \end{cases}$$

有唯一的一組解

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{\beta_0 f_0 - f_1}{\beta_0-\alpha_0}, \\ \beta = \dfrac{f_1-\alpha_0 f_0}{\beta_0-\alpha_0}. \end{cases}$$

現在利用數學歸納法證明

$$f_n = \alpha\alpha_0^n + \beta\beta_0^n.$$

(1) 當$n=0,1$時，由“唯一的一組解”知道成立。

(2) 設$n,n+1$時，公式成立，即

$$\begin{cases} f_{n+1}=\alpha\alpha_0^{n+1}+\beta\beta_0^{n+1}, \\ f_n=\alpha\alpha_0^n+\beta\beta_0^n. \end{cases}$$

由此推得

$$\begin{aligned} f_{n+2} &= af_{n+1}+bf_n \\ &= \alpha\alpha_0^n(a\alpha_0+b)+\beta\beta_0^n(a\beta_0+b) \\ &= \alpha\alpha_0^n\alpha_0^2+\beta\beta_0^n\beta_0^2 \\ &= \alpha\alpha_0^{n+2}+\beta\beta_0^{n+2}. \end{aligned}$$

證得本定理。

如果二次方程式的兩根相等則情況較為複雜，在此我們舉一個例子說明。

例題 23.1　數列$\langle f_n \rangle$滿足

$$f_0=1, f_1=4; f_{n+2}=6f_{n+1}-9f_n.$$

試求 f_n 的一般公式。

【解】由

$$f_{n+2}=6f_{n+1}-9f_n \Rightarrow (f_{n+2}-3f_{n+1})=3(f_{n+1}-3f_n)$$

推得

$$f_n-3f_{n-1}=3(f_{n-1}-3f_{n-2})=\cdots=3^{n-1}(f_1-3f_0)=3^{n-1}.$$

利用等式

$$\begin{aligned} f_n-3f_{n-1} &= 3^{n-1} \\ f_{n-1}-3f_{n-2} &= 3^{n-2} \\ &\vdots \\ f_1-3f_0 &= 3^0 \end{aligned}$$

推得

$$\begin{aligned} f_n-3^{n-1}\cdot 3f_0 &= (f_n-3f_{n-1})+3(f_{n-1}-3f_{n-2})+\cdots+3^{n-1}(f_1-3f_0) \\ &= 3^{n-1}+3^{n-1}+\cdots+3^{n-1} \\ &= n\cdot 3^{n-1}, \end{aligned}$$

即

$$f_n = (3+n)3^{n-1}.$$

例題 23.2　設數列$\langle a_n \rangle$滿足

$$a_0 = a_1 = 1,\ \ a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 1}{a_{n-1}}\ (n \geq 1).$$

證明：

(1) a_n滿足某一遞迴關係。

(2) a_n恆為（正）整數。

【解】

(1) 由a_n的前幾項

$$1,1,2,5,13,34,\cdots$$

猜想a_n滿足遞迴關係：$a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1}$。現在由題目的假設，推論此猜想成立。由

$$a_{n+1}a_{n-1} = a_n^2 + 1,\ \ a_n a_{n-2} = a_{n-1}^2 + 1$$

兩式相減得到

$$a_n(a_n + a_{n-2}) = a_{n-1}(a_{n+1} + a_{n-1}) \Rightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{a_n + a_{n-2}}.$$

因此

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{1} &= \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1} \\
&= \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{a_n + a_{n-2}} \cdot \frac{a_n + a_{n-2}}{a_{n-1} + a_{n-3}} \cdots \frac{a_3 + a_1}{a_2 + a_0} \\
&= \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{a_2 + a_0} \\
&= \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{3}.
\end{aligned}$$

即$a_{n+1}=3a_n-a_{n-1}$。事實上，也可以利用數學歸納法證明這則遞迴關係。

(2) 由$a_0=a_1=1$及遞迴關係$a_{n+1}=3a_n-a_{n-1}$馬上得證。

23.2 費氏數列

例題 23.3　費氏數列$\langle f_n\rangle$是指滿足下列條件的數列：

$$f_1=f_2=1, f_{n+2}=f_{n+1}+f_n.$$

試將f_n表為一般公式。

【解】因為$x^2=x+1$的兩根為

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

所以由**定理 23.1** 知道：可以找到α,β使得

$$f_n=\alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

由$f_1=1, f_2=1$解得

$$\begin{cases}\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}},\\ \beta=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}.\end{cases}$$

因此f_n的一般公式為

$$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}.$$

例題 23.4　證明費氏數列$\langle f_n\rangle$滿足：對每個正整數n恆有

$$3\mid f_{4n}.$$

【證明】將費氏數列的前十項列出如下：

$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,\cdots\cdots.$$

將此數列模 3 得到如下：

$$\overline{1,1,2,0,2,2,1,0},1,1,\cdots\cdots \pmod 3.$$

因為

$$\begin{cases} f_1 \equiv f_9 \equiv 1 \pmod 3, \\ f_2 \equiv f_{10} \equiv 1 \pmod 3, \\ f_{n+2} \equiv f_{n+1} + f_n \pmod 3, \end{cases}$$

所以此數列模 3 後所得的數列$\{f_n \pmod 3\}$是一個循環節為 8 的數列，而且第四項及第八項皆為 3 的倍數。由此得到

$$3 \mid f_{4n}.$$

設$\langle f_n \rangle$是一個整數數列且N是一個固定的正整數。如果將數列$\langle f_n \rangle$模N之後，所得的同餘數列$\langle f_n \pmod N \rangle$如上例題出現循環現象，則稱數列$\{f_n\}$是一個模$N$的循環數列。循環的最小倍數稱為此模$N$循環數列的循環節，例如上例題的費氏數列模 3 的循環節為 8。

23.3 泰爾克問題

從不等式

$$1<2<3<\cdots<n$$

中挑出一個子不等式

$$c_1<c_2<c_3<c_4<\cdots<c_{k-1}<c_k.$$

如果$c_1,c_3,\cdots$為奇數，$c_2,c_4,\cdots$為偶數，則稱此子不等式為交錯子不等式。例如

$$1<2<3$$

的交錯子不等式有下列四個：

$$1,$$
$$3,$$
$$1<2,$$
$$1<2<3.$$

設a_n代表不等式

$$1<2<3<\cdots<n$$

的交錯子不等式的個數。

定理 23.2 (泰爾克問題)　證明：$a_n = f_{n+2} - 1$, 其中$\langle f_n \rangle$代表費氏數列。

【證明】首先容易計算得到：$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4$，所以

$$a_1 + 1 = 2, a_2 + 1 = 3, a_3 + 1 = 5.$$

其次考慮a_{n-2}, a_{n-1}與a_n之間的關係：設

$$c_1 < c_2 < \cdots < c_{k-1} < c_k$$

是

$$1<2<3<\cdots<n$$

的一個交錯子不等式。

(1) 當$c_k < n$時，$c_1 < c_2 < \cdots < c_{k-1} < c_k$亦是$1<2<3<\cdots<n-1$的一個交錯子不等式。所以這樣的個數恰有$a_{n-1}$個。

(2) 當$c_k = n, c_1 \geq n-1$時，這時僅有兩個子不等式

$$n-1<n, n.$$

而上述兩個子不等式中恰有一個是交錯子不等式，所以這樣的個數僅有 1 個。

(3) 當$c_k = n, c_1 < n-1$且n為偶數時，分下列兩種情形討論：

(i) 若 $c_{k-1}=n-1$，則 $c_1<c_2<\cdots<c_{k-2}$ 為不等式 $1<2<3<\cdots<n-2$ 的交錯子不等式中，元素個數為偶數的交錯子不等式。

(ii) 若 $c_{k-1}<n-1$，則 $c_1<c_2<\cdots<c_{k-1}$ 為不等式 $1<2<3<\cdots<n-2$ 的交錯子不等式中，元素個數為奇數的交錯子不等式。

綜合(i), (ii)這些交錯子不等式的個數恰為 a_{n-2}。同理，若 n 為奇數時，則討論亦同。

綜合(1), (2), (3)得到：$a_n=a_{n-1}+1+a_{n-2}$。由此式整理得到：

$a_1+1=2, a_2+1=3, (a_n+1)=(a_{n-1}+1)+(a_{n-2}+1)$。因此 $a_n+1=f_{n+2}$，即 $a_n=f_{n+2}-1$。

習題 23.1　證明費氏數列 $\langle f_n\rangle$ 滿足：對每個正整數 n 恆有

$$f_1+f_2+f_3+\cdots+f_n=f_{n+2}-1.$$

習題 23.2　證明費氏數列 $\langle f_n\rangle$ 滿足：對每個正整數 n 恆有

$$5\mid f_{5n}.$$

習題 23.3　證明費氏數列 $\langle f_n\rangle$ 滿足：對每個正整數 m,n

(1) $f_{m+n}=f_{m+1}f_n+f_m f_{n-1}$.

(2) $f_n^2+f_{n-1}^2=f_{2n-1}$.

(3) 若 $n\mid m$，則 $f_n\mid f_m$.

習題 23.4　設數列 $\langle f_n\rangle$ 滿足：

$$f_0=5, f_1=3; 5f_{n+2}=6f_{n+1}-5f_n.$$

證明 $|f_n| \le 5$。

習題 23.5　如果

(1) 數列 $\langle f_n \rangle$ 滿足：

$$f_0 = 1, f_1 = 3; f_{n+2} = 4f_{n+1} - 4f_n.$$

試求 $\langle f_n \rangle$ 的一般公式。

(2) 數列 $\langle f_n \rangle$ 滿足：

$$f_0 = a, f_1 = b; f_{n+2} = 2cf_{n+1} - c^2 f_n.$$

試求 $\langle f_n \rangle$ 的一般公式（以 a,b,c,n 表示）。

習題 23.6　設 $\langle f_n \rangle$ 是費氏數列，分別就

(1) $N = 7$

(2) $N = 11$,

求模 N 的循環節。

習題 23.7　設數列 $\langle f_n \rangle$ 滿足：f_1, f_2 為整數且 $f_{n+2} = af_{n+1} + bf_n$，其中 a,b 亦為整數。如果 N 是一個正整數，試證明 $\langle f_n \rangle$ 是一個模 N 的循環數列（且循環節不大於 N^2）。

習題 23.8　求無窮級數和

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{10^n},$$

其中 f_n 是費氏數列。

習題 23.9　白藍粉刷公司想粉刷他們的 n 層摩天大樓。為了凸顯公司的標誌，限制每層樓只能用白色或者是藍色的油漆來粉刷，而且不能有連續兩層樓都是藍色的。你能幫白藍粉刷公司算算看，他有多少種粉刷方式嗎？

習題 23.10　設 $\langle F_n \rangle$ 是費氏數列，第 n 個黃金矩形是指 $F_n \times F_{n+1}$ 的矩形（即長為 F_n 單位、寬是 F_{n+1} 單位的矩形）。試問：不同的黃金矩形是否會相似。

習題 23.11　將正整數

$$1,2,3,\cdots,n$$

重新排列成一數列

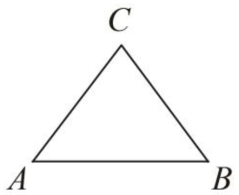
$$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n.$$

設 F_n 代表滿足

$$i-1 \le a_i \le i+1 \ \ (i=1,2,3,\cdots,n)$$

的排法。試求 $F_n =$？

習題 23.12　考慮如下圖之三角形，某質點在三角形之各頂點間移動，且假設由任一頂點到相鄰頂點之機率皆為 $\dfrac{1}{2}$。今從 A 點出發，計算走 n 步後，到達 A、B、C 之機率如下表，請回答下面的問題：



n	A	B	C
第一步	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
第二步	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
第三步	$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\boxed{}$
⋮	⋮	⋮	⋮
第 n 步	a_n	b_n	c_n

(1) 請完成上表中第三步的機率。

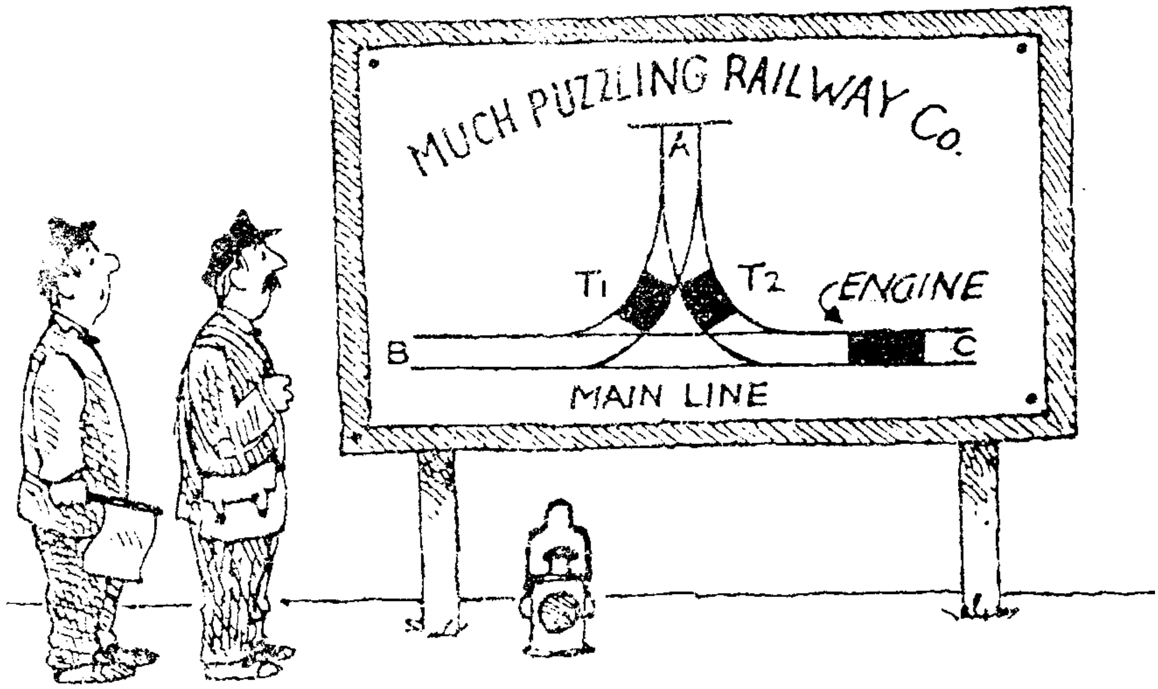
(2) 證明：

$$\begin{cases} b_n = c_n \\ b_{n+1} = \dfrac{a_n}{2} + \dfrac{b_n}{2} \\ a_{n+1} = b_n \end{cases}$$

(3) 請以 n 為變數表示 a_n、b_n。

動手玩數學

如下圖：有 T_1、T_2 兩車廂（無動力，其長度比 A 點轉換軌的長度略長）及引擎車 E（有動力）。車廂與車廂或車廂與引擎車接觸時（無論哪一邊接觸），皆可以將它們鏈結在一起；鏈結在一起的也隨時可以解開來，而且無論引擎車推車廂或者是拉車廂時，皆能控制車廂前進的方向。如果想要將 T_1、T_2 兩車廂互換位置，應如何操作。



挑戰題

設數列$\langle f_n \rangle$滿足：

$$f_n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n}{2k} \cdot 3^k$$

(1) 證明$\langle f_n \pmod{5} \rangle$是一個循環數列。

(2) 證明

$$5 \mid f_{6n+3}.$$

二次多項式的問題

已知當$0 \le n \le 16$時，$n^2 - n + 17$皆為質數；而$n^2 - n + 41$在$0 \le n \le 40$時亦為質數。最近畢格算出$n^2 - n + 72491$在$0 \le n \le 11000$時亦為質數。因此，給定一個正整數N，是否存

在一個質數 p 使得：當 $0 \le n \le N$ 時，$n^2 - n + p$ 皆為質數。這是一個很難且尚未解決的問題。